

TEORIA OBWODÓW II - ETE0141W

Zagadnienia egzaminacyjne

1. Przekształcenie Laplace'a, warunki istnienia transformaty dystrybucji i funkcji, obszar zbieżności transformaty.
2. Transformata Laplace'a delty Diraca, funkcji jednostkowej, funkcji eksponencjalnej, funkcji sinus i cosinus.
3. Podstawowe własności transformaty Laplace'a (liniowość transformaty, transformata funkcji przesuniętej, transformata pochodnej).
4. Transformata Laplace'a funkcji okresowej.
5. Transformata odwrotna Laplace'a, rozkład na ułamki proste metodą Heaviside'a.
6. Transformata odwrotna Laplace'a, metoda Goldstone'a.
7. Postulaty teorii obwodów w ujęciu operatorowym.
8. Operatorowe układy zastępcze elementów obwodu, uwzględnianie warunków początkowych.
9. Specyfika ujęcia operatorowego metody prądów oczkowych i napięć węzłowych, warunki początkowe.
10. Twierdzenie Thevenina i Nortona w ujęciu operatorowym.
11. Operatorowy opis czwórników.
12. Układy wielozaciskowe w ujęciu operatorowym.
13. Funkcja układu, podstawowa własność funkcji układu.
14. Charakterystyka impulsowa układu, podstawowa własność, spłot z pobudzeniem.
15. Twierdzenie o stabilności układów w sensie BIBO.
16. Kryteria stabilności w sensie BIBO, tablica Routha-Hurwitza, rozkład na ułamki łańcuchowy.
17. Odwrotna transformata funkcji okresowej, szereg Fouriera.
18. Widmo dyskretne amplitudowe i fazowe, własności współczynników szeregów Fouriera. Przykłady obliczania współczynników szeregów Fouriera, widmo okresowej delty Diraca.
19. Analiza obwodu SLS przy pobudzeniach okresowych niesinusoidalnych.
20. Widmo mocy sygnału okresowego, równość Parsevala.
21. Moce w obwodzie przy pobudzeniach okresowych.
22. Wartość skuteczna przebiegu okresowego.
23. Widmo sygnału nieokresowego, ciągła transformacja Fouriera.
24. Związek transformaty Fouriera i transformaty Laplace'a.
25. Dystrybucyjna transformata Fouriera.
26. Reakcja układu SLS na pobudzenie nieokresowe, charakterystyki częstotliwościowe układu stabilnego w sensie BIBO.
27. Warunek niezniekształcania sygnału przez układy liniowe, skompensowany dzielnik napięcia.
28. Układy kształtujące. Różniczkowanie i całkowanie sygnałów.
29. Energia sygnału, równość Parsevala.
30. Umowne granice widma sygnału.
31. Związek między charakterystykami częstotliwościowymi, transformacja Hilberta.
32. Związki Kroniga-Kramersa.
33. Związek między charakterystyką amplitudową i fazową układów minimalnofazowych.
34. Podstawowy warunek realizowalności fizycznej układów, kryterium Paley'a-Wienera.
35. Schematy blokowe, zasady tworzenia schematów blokowych.
36. Układ ze sprzężeniem zwrotnym, stosunek zwrotny, różnica zwrotna.
37. Zasada argumentu Cauchy, twierdzenie Michajłowa o stabilności układu w sensie BIBO.
38. Kryterium Nyquista stabilności w sensie BIBO układu ze sprzężeniem zwrotnym.
39. Sygnał zmodulowany amplitudowo.
40. Modulacja kąta sygnału.

①

① Przekształcenie Laplace'a, warunki istnienia transformaty dystrybucji i funkcji, obszar zbieżności transformaty.

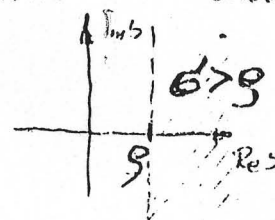
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad s = \sigma + j\omega$$

Transformata Laplace'a parametru $f(t)$ istnieje, jeśli istnieje niegdyś zbiór parametrów s , dla których całka definiująca transformację jest zbieżna.

Dystrybucja typu ułamkowego.

1. Istnieje $F(t) = 0$ dla $t < 0$, co $F^{(k)}(t) = f(t)$
2. $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$; $t > 0$, $M, \sigma > 0$

Transformata dystrybucji typu eksponencjalnego istnieje w sensie teoretycznym, ale praktycznej wartości nie posiada, parametru całkowitego, które jest ułamkowe.



Funkcja jest typu ułamkowego.

1. $f(t) = 0$ $t < 0$
2. $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$; $M, \sigma > 0$; $t > 0$

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$

② Transformata Laplace'a delty Diraca, funkcji jednostkowej, eksponenty, funkcji sinus i cosinus

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} e^{-st} - \left(\frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} \right) = 0 - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{\lambda+s} e^{-(\lambda+s)t} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda+s} e^{-(\lambda+s)t} - \left(-\frac{1}{\lambda+s}\right) e^0$$

$$= \frac{1}{s+\lambda}$$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega_c t\} = \int_0^{\infty} \sin \omega_c t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{j\omega_c t} \cdot e^{-st} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-j\omega_c t} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{(j\omega_c - s)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(j\omega_c + s)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \times \frac{1}{j\omega_c - s} e^{(j\omega_c - s)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2j} \times \frac{1}{j\omega_c + s} e^{-(j\omega_c + s)t} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{j\omega_c - s} + \frac{1}{j\omega_c + s} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{j\omega_c - s + j\omega_c + s}{s^2 + \omega_c^2} = \frac{\omega_c}{s^2 + \omega_c^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_c t\} = \int_0^{\infty} \cos \omega_c t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega_c t} \cdot e^{-st} + e^{-j\omega_c t} \cdot e^{-st}) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{(j\omega_c - s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(j\omega_c + s)t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega_c - s} e^{(j\omega_c - s)t} + \frac{1}{j\omega_c + s} e^{-(j\omega_c + s)t} \right) \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega_c + s} - \frac{1}{j\omega_c - s} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s + j\omega_c + s - j\omega_c}{s^2 + \omega_c^2} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_c^2}$$

③ Podstawowe własności transformaty Laplace'a, wykorzystanie do obliczania transformat.

1. Proporcjonalności i addytywności

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

2. Transformata funkcji przesuniętej

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\int_0^{\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt = \int_{-t_0}^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot e^{-st_0}$$

3. Transformata pochodnej funkcji

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0_-)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \underbrace{f(t) \cdot e^{-st}}_=-f(0_-) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

4. Transformata k-tej pochodnej funkcji

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{i=1}^k s^{k-i} f^{(i-1)}(0_-)$$

5. Transformata całki oznaczonej

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

6. Transformata całki nieoznaczonej

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} \Big|_s^0$$

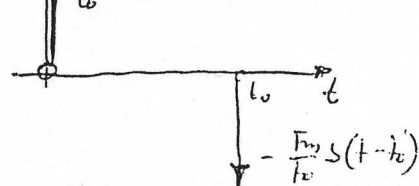
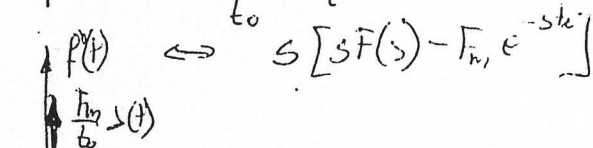
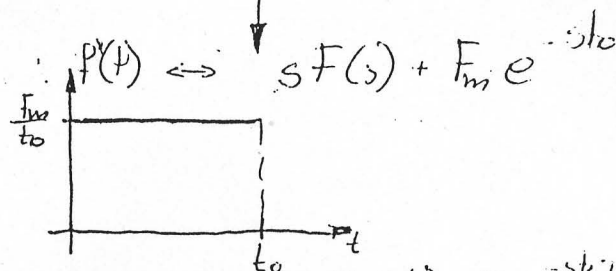
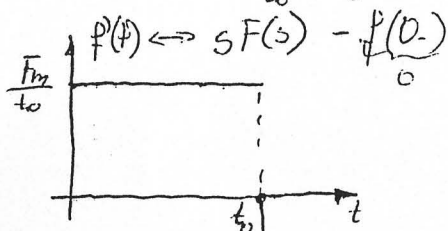
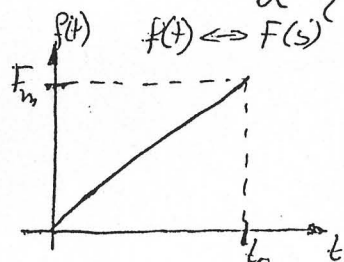
$$7. \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - f(0_-)$$

$$f(t) = \text{sh}(\omega t) \cdot 1(t)$$

$$\begin{aligned} s(t) \text{sh}(\omega t) + \omega \text{ch}(\omega t) \cdot 1(t) &\xrightarrow{\quad} F(s) \\ \omega^2 \text{sh}(\omega t) \cdot 1(t) + \underbrace{\omega \text{ch}(\omega t) S(t)}_{S(t)} &\xrightarrow{\quad} s^2 F(s) - f(0_-) - f'(0_-) \end{aligned}$$

$$\omega^2 F(s) + \omega = s^2 F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\text{sh}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$



$$\frac{F_m}{t_0} = \frac{F_m}{t_0} e^{-st_0} = s^2 F(s) - s F_m e^{-st_0}$$

④ Transformata Laplace'a funkcji okresowej

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

$$F_T(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} f(t) e^{-st} dt + \dots = \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_0^T f(t+T) e^{-s(t+T)} dt + \int_0^T f(t+2T) e^{-s(t+2T)} dt + \dots = \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + e^{-sT} \left[\int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \dots \right] \\ F(s) &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

⑤ Transformata odwrotna Laplace'a, rozkład na ułamki proste metoda Heaviside'a.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2j\pi} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s) e^{st} ds & t > 0 \\ \frac{1}{2} f(0_+) & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Funkcje: wyrażenie to stosunek dwóch wielomianów

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

Gdy wielomian mianownika ma pojedyncze pierwiastki rzeczywiste

$$M(s) = \prod_{i=1}^m (s - s_i) \quad m = \text{st } M(s)$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s - s_i} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_m}{s - s_m}$$

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} F(s) \cdot (s - s_i)$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad ; \quad M(s) = \prod_{i=1}^m (s - s_i)$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s - s_i}$$

PRZYKŁAD

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{(-2+1)(-2+3)} = -1$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(-3+1)(-3+2)} = \frac{1}{2}$$

⑥ Transformata odwrotna Laplace'a, metoda Goldstone'a

Metodę tą wykorzystuje się, gdy transformata $F(s)$ funkcji ma bieguny wielokrotne

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{st } L(s) < \text{st } M(s)$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{(s - s_i)^{n_i} \cdot N(s)} \quad p = s - s_i$$

$$F(p + s_i) \cdot p^{n_i} = \frac{L(s_i + p)}{N(s_i + p)}$$

Wykonuje się dzielenie L przez N lub odwrotnie, aż wynik dzielenia będzie miał stopień p o jeden mniejszy niż wartości biegunów

PRZYKŁAD:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)}$$

$$s_1 = -1 \quad p = s + 1$$

$$F(p-1) = \frac{1}{p^3(p+1)}$$

$$F(p-1) \cdot p^3 = \frac{1}{p+1}$$

$$1 : p+1 = 1 : 1+p = 1 - p + p^2 - \frac{1-p}{1+p} = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1-p^2}{1+p^2} = \frac{1-p^2}{p^2+p^2} = \frac{1-p^2}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{p^2}{p^2} = \frac{1}{p^2} - 1$$

$$F(p-1) \cdot p^3 = 1 - p + p^2 - \frac{p^3}{1+p}$$

$$F(p-1) = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{1+p}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

⑦. Pochwały teorii obwodów w ujęciu operatorowym.

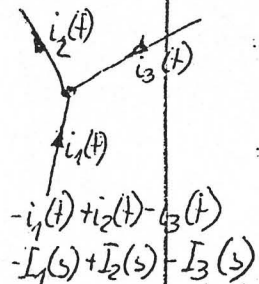
\mathcal{L} prawo Kirchhoffa

$$A \cdot \dot{i}(t) = 0$$

$$\mathcal{L} \{ A \cdot \dot{i}(t) \} = 0$$

$$A \cdot \bar{I}(s) = 0$$

$$\bar{I}(s) = \text{col} [\mathcal{L} \{ i_1(t) \}; \dots; \mathcal{L} \{ i_q(t) \}]$$



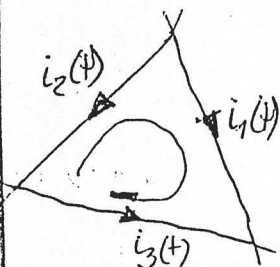
\mathcal{L} prawo Kirchhoffa

$$B \cdot u(t) = 0$$

$$\mathcal{L} \{ B \cdot u(t) \} = 0$$

$$B \cdot \bar{U}(s) = 0$$

$$\bar{U}(s) = \text{col} [\mathcal{L} \{ u_1(t) \}; \dots; \mathcal{L} \{ u_p(t) \}]$$

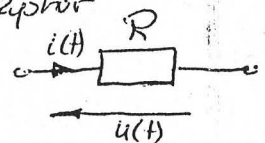


$$-u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 0$$

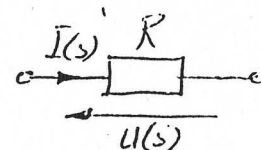
$$-u_1(s) + u_2(s) + u_3(s) = 0$$

⑧ Operatorne układy zastępcze elementów obwodu, i uwzględnienie warunków początkowych.

1. Rezystor

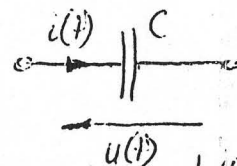


$$u(t) = i(t) \cdot R$$

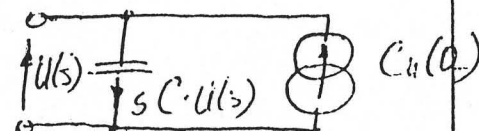


$$U(s) = I(s) \cdot R$$

2. Kondensator

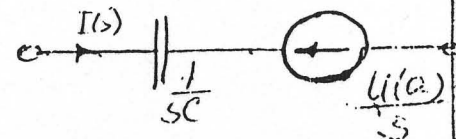


$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

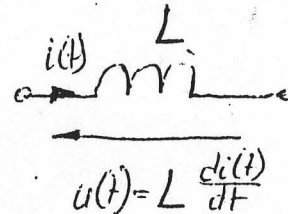


$$I(s) = sC \cdot U(s) - C u(0)$$

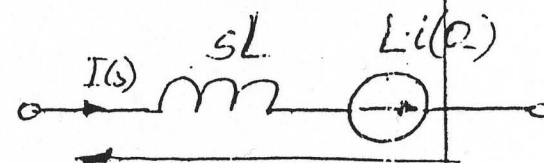
$$U(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s) + \frac{u(0)}{s}$$



3. Induktor

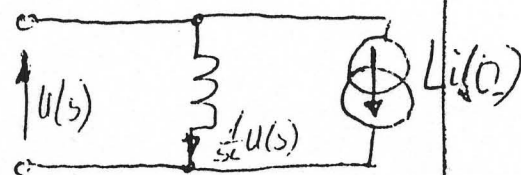


$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

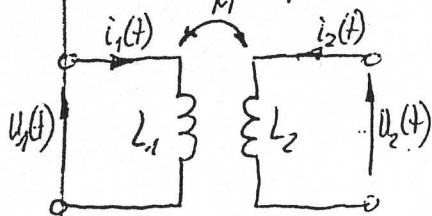


$$U(s) = sL \cdot I(s) - L i(0)$$

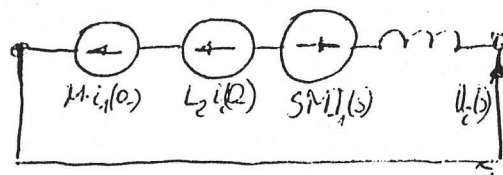
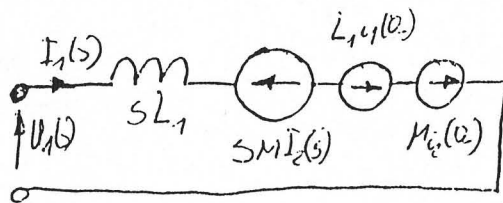
$$I(s) = \frac{1}{sL} U(s) + L i(0)$$



4. Cewki sprzężone



$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$



$$\underline{U}(s) = \begin{bmatrix} SL_1 & SM \\ SM & SL_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{I}(s)$$

- 9) Sformułuj ujęcie operatorowe metody prądów oczekowych i napięć węzłowych, warunki początkowe.

Metoda symbolicznych prądów oczekowych

$$\underline{E} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_M$$

Metoda operatorowa prądów oczekowych

$$\underline{Z}_M(s) \cdot \underline{I}(s) = \underline{E}_a(s) + \underline{E}_{np}(s)$$

1. Utworzył zastępczy układ operatorowy. Zbiór należy zastąpić na transformach przebiegów czasowych. Elementy R, L, C, M zastępuje się współczynnikiem operatorowym.

2. Konstrukcja oczek niezakłóconych (na bazie ciek fundamentalnych). Należy uwzględnić źródła E i warunki początkowe.

3. Utworzył układ równań zgodnie z zasadami metody symbolicznej.

4. Rozwiązanie równań

Uziwno się układ zastępczy napięciowy

Metoda symbolicznych potencjałów węzłowych

$$\underline{I}_{zw} = \underline{Y}_W \cdot \underline{V}_W$$

Metoda operatorowa potencjałów węzłowych

$$\underline{Y}_W(s) \cdot \underline{V}_W(s) = \underline{I}_{ZWC}(s) + \underline{I}_{ZWN}(0)$$

Algorytm rozwiązywania jest identyczny jak w metodzie symbolicznej.

Uziwno się układ zastępczy prądowy.

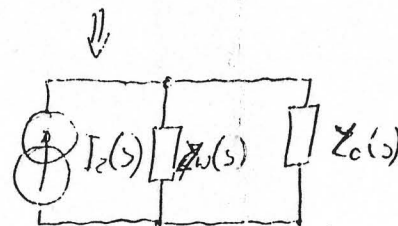
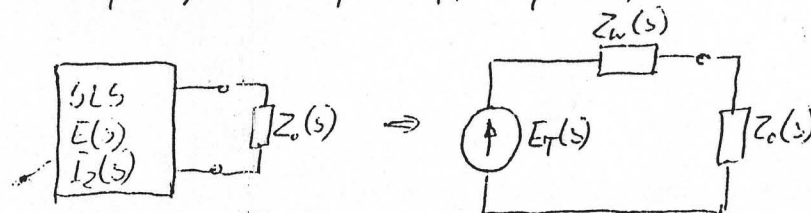
- 10) Zasada superpozycji, twierdzenie Nortona, Thevenina w ujęciu operatorowym.

METODA SUPERPOZYCJI

Transformacje każdej reakcji operatorowej jest sumą transformacji każdego ze źródeł przy wyłączeniu innych. Jeżeli nie wyłącza się źródła porządkowych, uziwno się je do zerowe.

Tw. NORTONA i THEVENINA

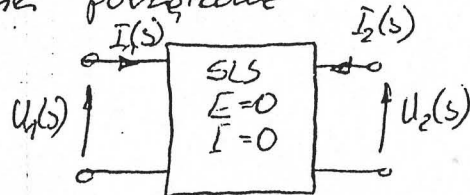
Każdy liniowy dwud SLS, $\underline{E}(s)$, $\underline{I}_2(s)$ może być na dwóch końcach zastąpiony siłą elektromotoryczną i impedancją wejściową.



$$\begin{aligned} Y_N &= \frac{1}{Z_N} \\ I_N &= \frac{E_T}{Z_T} \end{aligned}$$

11) Operatorowy opis wzmacniaka

Gadomik - układ SLS, w którym nie ma str. elektrycznych (mog. być źródła sterowane). Wydzielone są pary rezystorów niezależnych i zależnych. W układach elektrycznych prądy w trybie transmitujących. W opisie operatorowym należy uwzględnić transformatory prądu i napięcia oraz warunki początkowe



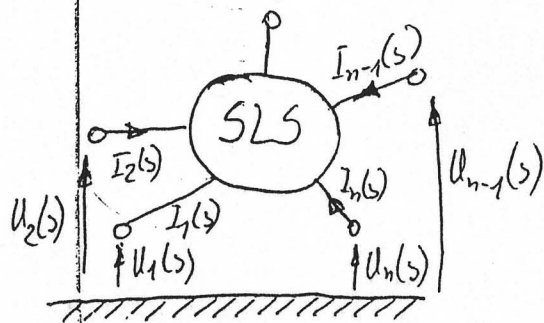
OPISY MACIERZY CZWIERNIKÓW

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = Z(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = Y(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = A(s) \begin{bmatrix} U_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = B(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = H(s) \begin{bmatrix} I_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

12) Układy wielozaradkowe w ujęciu operatorowym



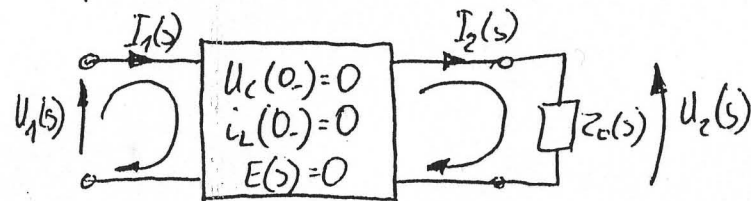
$$I(s) = \text{col}[I_1(s), \dots, I_n(s)]$$

$$U(s) = \text{col}[U_1(s), \dots, U_n(s)]$$

$$Y = y_{kj}(s) \cdot I_n$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s), \dots, y_{1n}(s) \\ \vdots \\ y_{n1}(s), \dots, y_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix}$$

13) Funkcje układu, podstawane wartości funkcji układu.



$$Z_m(s) \cdot I_m(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1(s) = \frac{\Delta_m^{(1)}(s)}{\Delta_m(s)} = \frac{U_1(s) \cdot \Delta_{m1}(s)}{\Delta_m(s)} \quad I_2(s) = \frac{\Delta_m^{(2)}(s)}{\Delta_m(s)} = \frac{U_1(s) \cdot \Delta_{m12}(s)}{\Delta_m(s)}$$

$$U_2(s) = Z_o(s) \cdot \frac{U_1(s) \cdot \Delta_{m12}(s)}{\Delta_m(s)}$$

Funkcja układu jest sumą wielkości oznaczonych przez wyrażenie do wielkości oznaczonych przez

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = Z_o(s) \cdot \frac{\Delta_{m12}(s)}{\Delta_m(s)}$$

$$R_{ij} + sL_{ij} + \frac{1}{sC_{ij}}$$

Wartości funkcji układu:

1. $H(s) = \frac{L(s)}{H(s)} \Rightarrow$ dopełnienie i uśrednianie. można doprowadzić do postaci wielomianu

2. Współczynniki wielomianu liczone i mierzony są rzeczywiste.

②

14) Charakterystyka impulsowa układu, podane wartości, spłot z pobudzeniem.

Charakterystyka impulsowa układu jest reakcją układu na pobudzenie deltą Diraca.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 0 \text{ dla } t < 0$$

$$h(t) = 0 \text{ dla } t < 0$$



$$H(s) = \frac{R(s)}{P(s)}$$

$$R(s) = H(s) \cdot P(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = p(t) \quad \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = r(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

$$p(t) = \delta(t) \Rightarrow P(s) = 1$$

stąd:

$$R(s) = H(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot P(s)\}$$

Podane wartości

$$\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\}$$

$$r(t) = h(t) * p(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot p(t-\tau) d\tau$$

Spłot z pobudzeniem. Związek pomiędzy p, r, h w dziedzinie czasu

$$R(s) = H(s) \cdot P(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot P(s)\}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \cdot e^{-st} dt$$

$$\begin{matrix} t-\tau = \tau \\ dt = d\tau \end{matrix}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \cdot e^{-s(\tau+\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

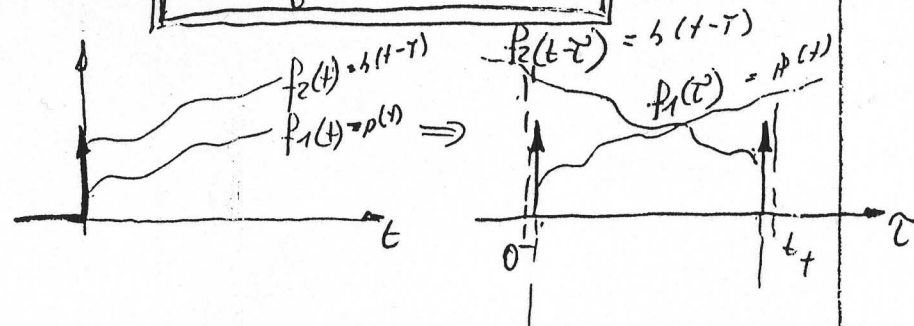
$$\mathcal{L}^{-1}\{P * P\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = 0 \text{ dla } t < 0$$

$$f_1(\tau) = 0 \text{ dla } \tau < 0$$

$$r(t) = h(t) * p(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) p(t-\tau) d\tau$$



15 Twierdzenie o stabilności układu w sensie BIBO.

$$|p(t)| \leq C_p < \infty \Rightarrow |r(t)| \leq C_r < \infty \quad t \geq 0$$

Ograniczenie w czasie pobudzenia odpowiada ograniczeniu w czasie reakcji.

Układ jest stabilny w sensie BIBO \Leftrightarrow kiedy charakterystyka impulsowa daje się zapisać w postaci:

$$\boxed{\begin{aligned} h(t) &= a_s(t) + h_o(t) \\ |a| + \int_0^\infty |h_o(t)| dt < \infty \\ \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty \end{aligned}}$$

Twierdzenie operatorowe

$$H(s) = a + H_o(s)$$

$$H(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

$$\text{st } L(s) \leq \text{st } M(s) \quad M(s) \in NH$$

$$H(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt$$

16 Kryteria stabilności w sensie BIBO, tabela Routha-Hurwitza, rozkład na iloczyn wielomianów.

$$M(s) = p(s) + n(s)$$

części parzyste

części nieparzyste

$$F(s) = \frac{p(s)}{n(s)} \cup \frac{n(s)}{p(s)} \quad \text{st. licznika} \geq \text{st. mianownika}$$

$$F(s) = p_1 s + \frac{1}{p_2 s + \frac{1}{p_3 s + \dots}}$$

Układ jest stabilny w sensie BIBO, gdy

1. Wszystkie współczynniki wielomianu są jednokrotnego znaku
2. Wszystkie współczynniki $F(s)$ na ilorazie bilokowane są dodatnie.

METHODS ROUTH - HURVITZ

Dany jest wielomian: $M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$

Współczynniki	a_m	a_{m-2}	a_{m-4}	...	1	1. $\sqrt{a_m}$ (1)
	a_{m-1}	a_{m-3}	a_{m-5}	...	2.	2. $\sqrt{a_{m-1}}$ (2)
	b_m	b_{m-1}	b_{m-2}	...	3.	3. $\sqrt{a_{m-2}}$ (3)
	c_m	c_{m-1}	c_{m-2}	...		
	d_m					

$$b_{m-1} = -\frac{1}{a_{m-1}} \times \begin{bmatrix} a_m & a_{m-4} \\ a_{m-1} & a_{m-5} \end{bmatrix} \quad c_m = -\frac{a_{m-1} a_{m-3} - a_m a_{m-4}}{a_{m-1}}$$

$$b_m = -\frac{1}{a_{m-1}} \times \begin{bmatrix} a_m & a_{m-2} \\ a_{m-1} & a_{m-3} \end{bmatrix}$$

Przykład:

$$M(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4$$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & \\ 1 & & \\ 4 & & \end{array}$$

Jeśli wszystkie współczynniki w pierwszej kolumnie są dodatnie to układ jest stabilny w sensie BIBO

14) Odwrotna transformata Laplace'a transformaty funkcji okresowej, szereg Fouriera.

Metoda uproszczenia transformacji odwrotnej dla funkcji meromorficznej (czyli będącej transformacją funkcji okresowej)

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

Funkcja $F(s)$ jest transformacją funkcji okresowej, jeżeli istnieje:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_T(s)\} = f_T(t) \neq 0, \text{ oraz } f_T(t) = 0 \text{ dla } t < 0 \text{ i } t > T$$

Transformata odwrotna wyraża się w jednym okresie, a kolejne okresy uzyskuje się poprzez przedłużenie analityczne.

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega(1 - e^{-sT})}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$F_T(s) = \frac{\omega(1 - e^{-sT})}{s^2 + \omega^2}$$

SZEREG FOURIERA

Symulacja okresu: $f(t) = f(t + kT)$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

$$F_T(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

$$1 - e^{-skT} = 0$$

$$e^{-skT} = 1$$

$$s_k T = j 2\pi k$$

$$s_k = j k \omega_0 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{L(s)}{M(s)} (s - s_k) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{\frac{L(s)}{M(s)}}{\frac{s - s_k}{s - s_k}} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{L(s)}{M(s) - M(s_k)}$$

$$A_k = \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} = \frac{F_T(s_k)}{T e^{-s_k T}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = F_k$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{j k \omega_0 t}$$

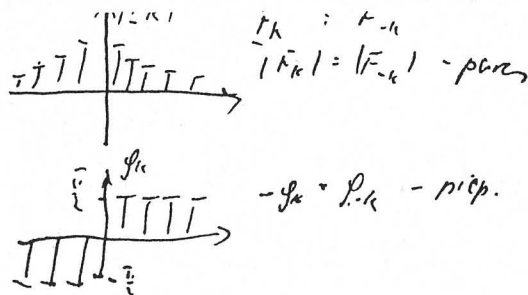
$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$$

Rozkład funkcji okresowej w szereg Fouriera

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} F_k e^{j k \omega_0 t} + F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k e^{j k \omega_0 t} = \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| e^{-\varphi_k} e^{j k \omega_0 t} + F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| e^{j \varphi_k} e^{j k \omega_0 t}$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 |F_k| \cos(k \omega_0 t + \varphi_k)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \arg F_k \\ \omega_k &= \omega \cdot k \\ F_{kmax} &= 2 |F_k| \\ F_{kusk} &= \frac{2 |F_k|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



18) Widmo dyskretne, amplitudowe i fazowe, własności współczynników szeregu Fouriera. Przykłady obliczeń współczynników szeregu, widmo okresowej delta Diraca.

$$F_k = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_k\}$$

$$F_k^* = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega t} dt \right)^* = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jk\omega t} dt$$

$$F_k^* = (|F_k| e^{j\varphi_k})^* = |F_k| e^{-j\varphi_k}$$

$$F_k = |F_k| e^{j\varphi_k}$$

$|F_k| \Rightarrow$ widmo amplitudowe przebiegu (perzysła funkcja k)

$\varphi_k \Rightarrow$ widmo fazowe przebiegu (nieperzysła funkcja k)

Własności transformacji Fouriera:

1. Linijność transformacji

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\}$$

2. Przesunięcie transformacji

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-jk\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\}$$

3. Transformata pochodnej

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = jk\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$$

4. Transformata całki

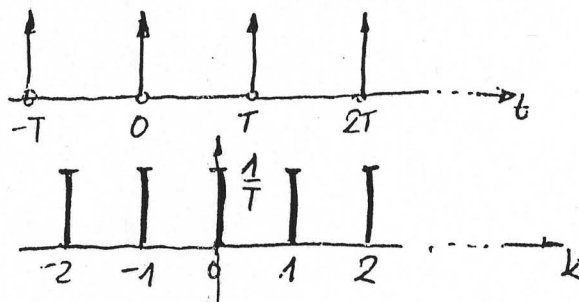
$$\mathcal{F}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{jk\omega} \mathcal{F}\{f(t)\}$$

Widmo okresowej delta Diraca:

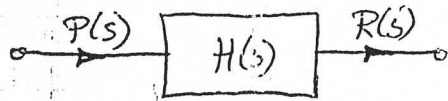
Okresowa delta jest przykładem dystrybucji, które w wyniku przekształcenia transformacji Fouriera przeobrazi w samą siebie.

$$S_T(t) \Rightarrow \text{delta okresowa} \quad S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_T(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{S(t)} e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T}$$



19) Analiza obrotu SLS przy pobudzeniach okresowych, nieharmonicznych.



$$P(s) = \frac{P_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

zatem $R(s) = H(s) \cdot \frac{P_T(s)}{1 - e^{-sT}}$

$$1 - e^{-s_k T} = 0$$

$$s_k = jk\omega_0 \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) \cdot \frac{1}{T} P_T(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T} P_T(jk\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = P_k$$

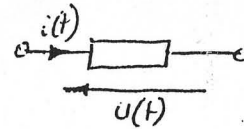
$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) P_k e^{jk\omega_0 t} \\ P_k &= H(jk\omega_0) P_k \\ H(jk\omega_0) &= H(s) \Big|_{s=jk\omega_0} \end{aligned}$$

Tylko dla układów stabilnych w sensie BIBO

W rozważaniach nieliniowych korzysta się z 10 harmonicznych (interpretacja Feynmana)

20) Widmo mocy sygnału okresowego, równość Parsevala

Równość Parsevala



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot I_k^*$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot g(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_k \cdot G_n \cdot \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k+n)\omega_0 t} dt$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k+n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & k+n \neq 0 \\ 1 & k+n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot g(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot G_k^* \Rightarrow \text{równość Parsevala dla szeregu Fouriera}$$

$$\text{gdzie } p(t) = g(t)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \quad \text{widmo mocy sygnału okresowego}$$

21) Mówi o dwóch przy połączeniu okresowym

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt \quad P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \cdot I_k^*$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{-1} U_k \cdot I_k^* + U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k^* = \sum_{k=-\infty}^{-1} U_k \cdot I_{-k}^* + U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k^* =$$

$$= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k^* I_k + U_k I_k^*) = U_0 I_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ U_k \cdot I_k^* \}$$

$$U_k = |U_k| e^{j\varphi_{Uk}} \quad I_k = |I_k| e^{j\varphi_{Ik}}$$

$$P = U_0 I_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ |U_k| \cdot |I_k| e^{j(\varphi_{Uk} - \varphi_{Ik})} \}$$

$$\varphi_{Uk} - \varphi_{Ik} = \Theta_k$$

$$P = U_0 I_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| \cdot |I_k| \cos \Theta_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{|U_k|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|I_k|}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cos \Theta_k$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ksk} \cdot I_{ksk} \cdot \cos \Theta_k$$

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_{ksk} \cdot I_{ksk} \cdot \sin \Theta_k$$

$$S = U_{sk} \cdot I_{sk}$$

22) Wartość skuteczną przebiegu okresowego

$$F_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$

$$F_{sk}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k|^2 + F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 =$$

$$= F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{|F_k| \cdot |F_k|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$$

$$F_{sk} = \sqrt{F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{ksk}^2}$$

23) Widmo ciągłe sygnału nieskończonego, ciągłe transformata Fouriera.

Ciągłe przekształcenie Fouriera dokonane nad funkcją $f(t)$, to przekształcenie całkowe postaci:

$$F\{f(t); \omega\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = G(\omega)$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera to przekształcenie całkowe

$$F^{-1}\{F(j\omega); t\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = f(t)$$

24) Związek transformaty Fouriera i transformaty Laplace'a

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad f(t) = 0 \text{ dla } t < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$$

25) Dystrybucyjna transformata Fouriera

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} e^{j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} e^{j\omega t} dt =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{j(\omega - k\omega_0)} e^{-j(\omega - k\omega_0)t} \right|_{-u}^u =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-j(\omega - k\omega_0)u} - e^{j(\omega - k\omega_0)u}}{-j(\omega - k\omega_0)} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\cos(\omega - k\omega_0)u - j\sin(\omega - k\omega_0)u - \cos(\omega - k\omega_0)u - j\sin(\omega - k\omega_0)u}{-j(\omega - k\omega_0)} =$$

$$= 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\cos(\omega - k\omega_0)u}{\omega - k\omega_0} = 0 \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega - k\omega_0)u}{\omega - k\omega_0} = \pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

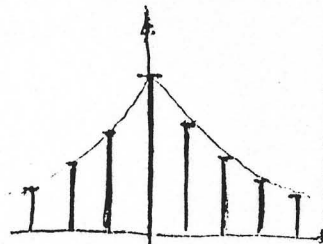
$$F(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$S_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$F_k \{ S_T(t) \} = \frac{1}{T} = F_k$$

$$F(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



26) Reakcja układu SLS na pobudzenie nieograniczone; charakterystyki częstotliwościowe układu stabilnego w sensie BIBO

Charakterystyki częstotliwościowe układu stabilnego w sensie BIBO

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)} = V(\omega) + jX(\omega)$$

$$H(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t dt}_{V(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin \omega t dt}_{X(\omega)}$$

$A(\omega) = A(-\omega) \Rightarrow$ charakterystyka amplitudowa
 $\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega) \Rightarrow$ charakterystyka fazy
 $V(\omega) = V(-\omega) \Rightarrow$ charakterystyka rzeczywista
 $X(\omega) = -X(-\omega) \Rightarrow$ charakterystyka wyimaginarna

Reakcja układu na pobudzenie nieograniczone

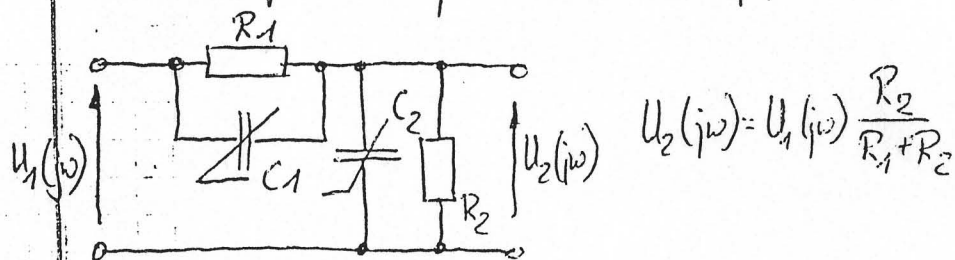
(27) Wzrostek niezniekształcanie sygnału przez układy liniowe, skompensowany dzielnik napięcia.

Układ niezniekształcający to układ, dla którego $r(t) = k \cdot p(t - t_0)$. Reakcja układu niezniekształcającego musi być proporcjonalna do pobudzenia ($k = \text{const}$) i może być co najwyżej opóźniona w czasie ($t_0 = \text{const}, t_0 > 0$) w układzie przyrównania.

$$R(j\omega) = k e^{-j\omega t_0} P(j\omega)$$

- Dla układu niezniekształcającego
- charakterystyka amplitudowa niezależna od częstotliwości
 - charakterystyka fazy proporcjonalna do częstotliwości.

Skompensowany dzielnik napięcia



$$U_2(j\omega) = U_1(j\omega) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$H(j\omega) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}$$

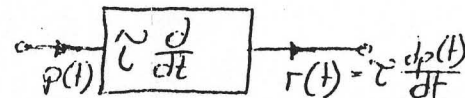
$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 \cdot \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_1 R_1} + R_2}$$

(28) Układy kształtujące. Rozmiarkowanie i całkowanie sygnałów.

Układy kształtujące są to układy, które celowo zniekształcają w określony sposób sygnały.

UKŁAD RÓŻNICZUJĄCY

Układ, którego reakcja jest proporcjonalna do pochodnej pobudzenia

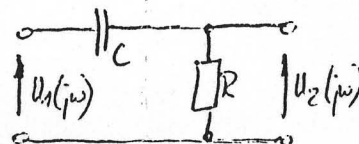


$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$$

$$R(j\omega) = \tau \cdot P(j\omega) \cdot j\omega$$

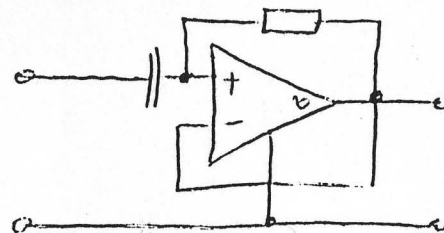
$$H(j\omega) = j\omega \tau$$

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad H(j\omega) \approx j\omega RC \quad \text{if } \omega RC \ll 1$$



Aby układ był różnicujący

$$\boxed{\omega_{\max} RC \ll 1}$$

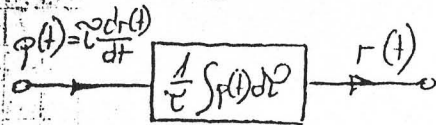


$$\tau = RC$$

rozmiarkowanie z wielk. stał. wzrostu

UKŁAD CAŁKOWY

Układ, którego reakcją jest całka pochodzenia

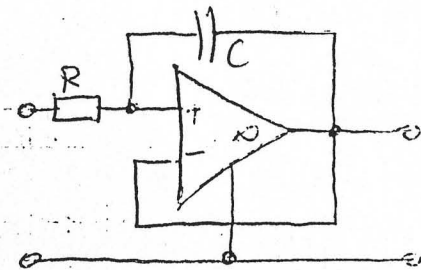
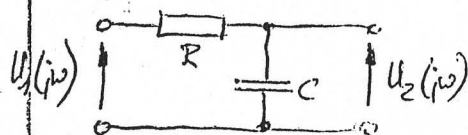


$$P(j\omega) = j\omega C R(j\omega) \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

Aby układ był całkujący

$$\omega_{min} RC \gg 1$$



Całkowanie
z dużym stałą
czasu $\tau = RC$

23 Energia sygnału. Równości Parsevala

$$f_2(t) = f_1(t) = f(t)$$

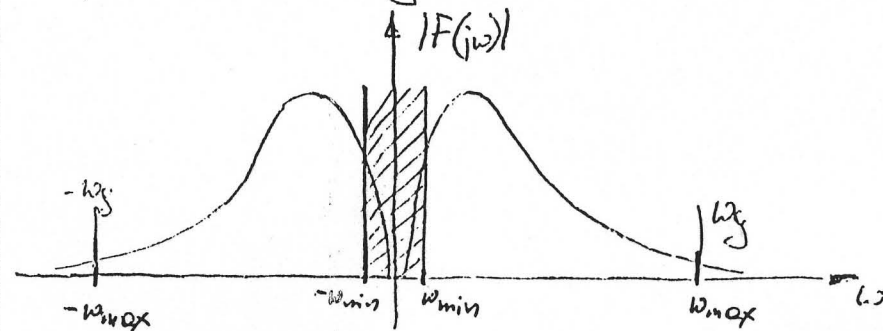
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \text{energia sygnału}$$

$\frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi} \Rightarrow$ gęstość widmowa energii, równości Parsevala dla ciągłego przekształcenia Fouriera.

Energia jest rozłożona w całym widmie sygnału.

20 Umowne granice widma sygnału.

Równanie energii sygnału umożliwia przyjęcie pewnej umownej dopuszczalnej szerokości pasmowej częstotliwości zajętego przez widmo sygnału.



$$2 \int_0^{\omega_{min}} \frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega = 0,005 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

$\omega_{min} \Rightarrow$ umowna częstotliwość graniczna minimalna.

Pomiędzy $(-\omega_{max}, -\omega_{min})$ i $(\omega_{min}, \omega_{max})$ znajduje się 90% energii sygnału.

$$2 \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega = 0,99 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

$$2 \int_0^{\omega_{min}} \frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega = 0,99 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

31) Związek między charakterystykami częstotliwościowymi, transformacja Hilberta.

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} = V(\omega) - jX(\omega)$$

$$H(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t dt}_{V(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \sin \omega t dt}_{X(\omega)}$$

$$X(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Przekształcenie Hilberta

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda$$

$$X(\omega) = \mathcal{H}\{V(\omega)\} \quad \text{Przekształcenie Hilberta ujęte w oparciu o}$$

$$\left. \begin{aligned} V(\omega) &= H(j\omega) - jX(\omega) \\ X(\omega) &= \frac{H(j\omega) - V(j\omega)}{j} \end{aligned} \right\} \text{wskazywany do przekształcenia Hilberta}$$

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(j\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

$$V(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(j\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$$

Ze względu na nieparzystość części urojonej

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X(\omega) = 0 \quad V(\omega) = V(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda$$

$$V(\omega) = V(\infty) - \mathcal{H}\{X(\omega)\}$$

32) Związek Kroniga-Kramersa

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - j\omega)(\lambda - j\omega)}$$

$$X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega V(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda$$

$$V(\omega) = V(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda \frac{X(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda$$

zależności Kroniga-Kramersa

$$X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega [V(\lambda) - V(\omega)]}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda$$

$$V(\omega) = V(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda X(\lambda) - \omega X(\omega)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda$$

zależności Kroniga-Kramersa bez funkcji ograniczeń

33) Związek między charakterystyką amplitudową i fazową dla układów minimalno-fazowych

Układy minimalne fazy to układy mające funkcję $H(s)$, która nie ma zer i biegunów w prawej półprzestrzeni. Układ minimalno-fazowy ma argument najmniejszy z możliwych dla danego zakresu pulsacji

$$X(\omega) = \mathcal{H}\{V(\omega)\} \quad V(\omega) = V(\infty) - \mathcal{H}\{X(\omega)\}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda$$

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} \Rightarrow \text{charakterystyka częstotliwościowa}$$

$$\ln H(j\omega) = \ln A(\omega) + j\theta(\omega)$$

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \mathcal{H}\{L(\omega)\} \\ L(\omega) &= L(\infty) - \mathcal{H}\{\theta(\omega)\} \end{aligned}$$

34) Podstawowy warunek realizowalności fizycznej układu, kryterium Paley'a - Wienera.

1. Układ musi być stabilny

$$H(\infty) = 0 \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} \text{ bieżąca wartość}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$\int_0^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega < \infty$$

$$\text{bo } H(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [V^2(\omega) + X^2(\omega)] \frac{d\omega}{2\pi} < \infty$$

$$A(\omega) \in L^2[-\infty, \infty]$$

$$V(\omega) \in L^2[-\infty, \infty]$$

$$X(\omega) \in L^2[-\infty, \infty]$$

KRYTERIUM PALEY'A - WIENERA

Błędny funkcji będącej dronkowską
amplitudową.
 $A(\omega) \neq 0 \quad A(\omega) = A(-\omega) \quad i \quad A(\omega) \in L^2[-\infty, \infty]$

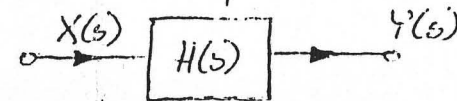
Jeżeli $A(\omega)$ jest rzeczywistą, nieujemną, parzystą funkcją klasy L^2 w przedziale $(-\infty, +\infty)$ i niech będzie zerem w nieskończoności, to obliczenie czołki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia rzeczywistej funkcji określonej na przedziale $(-\infty, +\infty)$ i równej zero dla $\omega < 0$ takiej, że
 $|H(j\omega)| = |\mathcal{F}\{h(t)\}| = A(\omega)$

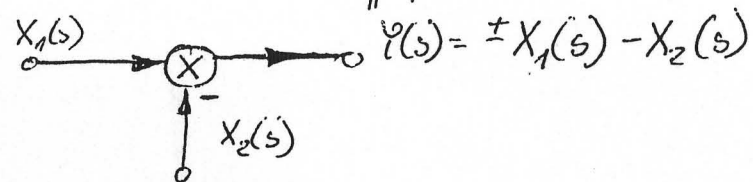
35) Schematy blokowe, zasady tworzenia schematów blokowych.

Schemat blokowy

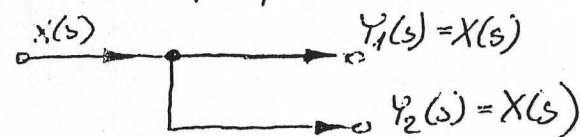


$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

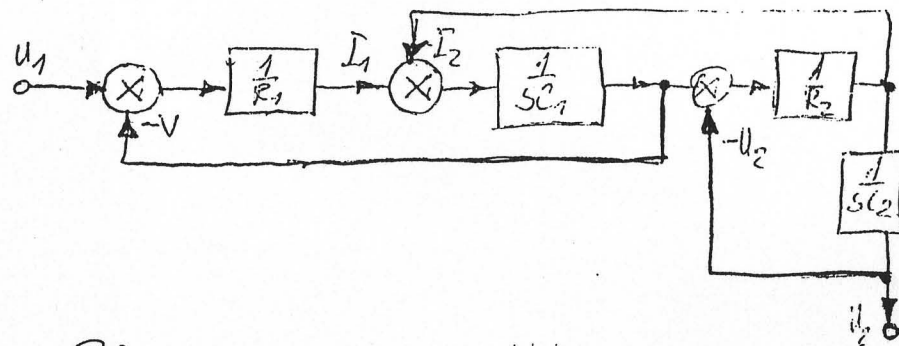
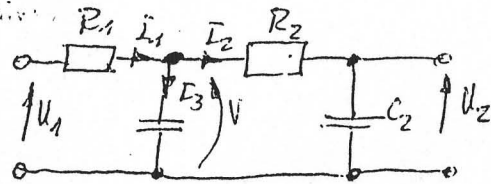
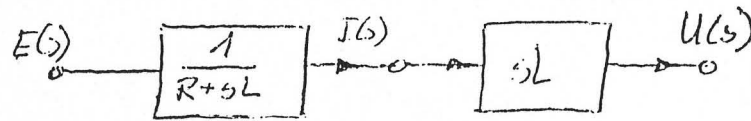
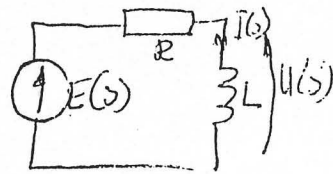
Schemat sumujący



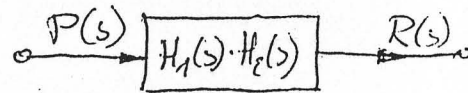
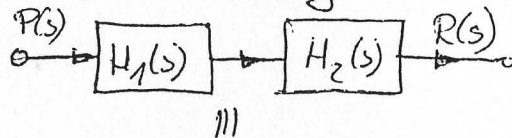
Wzrost rozprawy



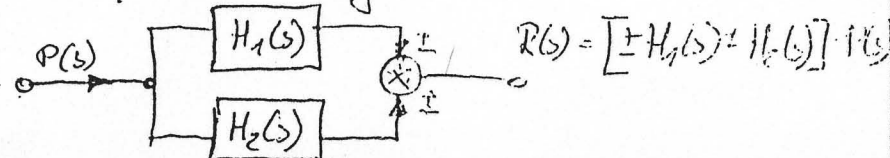
PRZYKŁAD



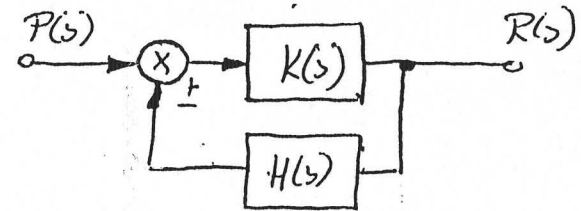
Łączenie szeregowe bloków



Łączenie równoległe

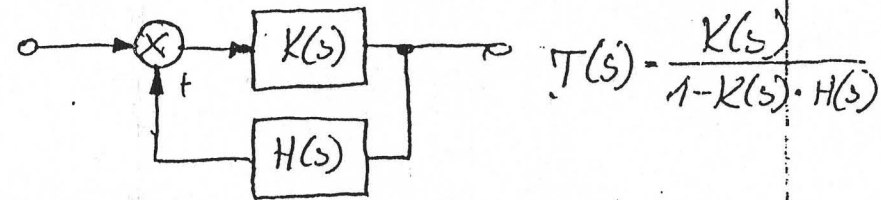


36 Układ ze sprzężeniem zwrotnym, stosunek zwrotny, różnica zwrotna, sposoby liczenia.



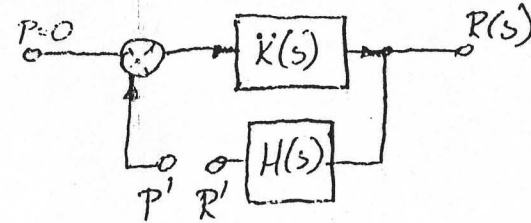
$$R(s) = K(s) \cdot [P(s) \pm H(s) \cdot R(s)]$$

$$R(s) = \frac{K(s) \cdot P(s)}{1 \pm K(s) \cdot H(s)} \Rightarrow T(s) = \frac{K(s)}{1 \pm K(s) \cdot H(s)}$$

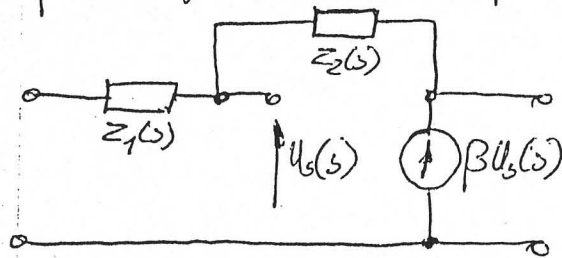


Różnica zwrotna: $F(s) = 1 - K(s) \cdot H(s)$
 $F(s) = 1 - Q(s)$

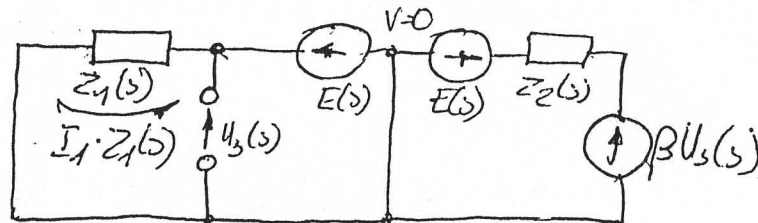
Stosunek zwrotny: $Q(s) = K(s) \cdot H(s) = \frac{R'(s)}{P'(s)}$



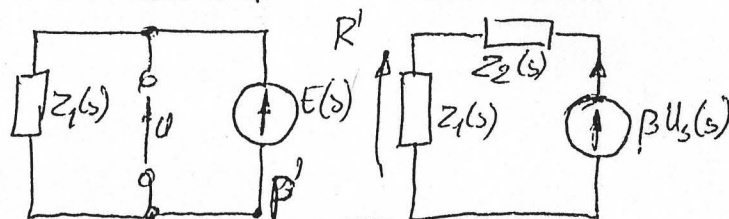
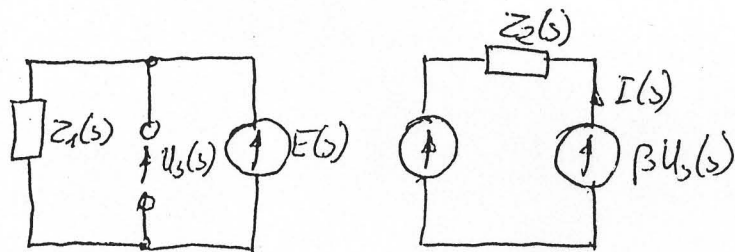
Rozważanie pętli sprzężenia, jeżeli nie ma pętli przez którą nie pójść p.p.o.



$$Q(s) = \frac{\beta Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$



$$E(s) = Z_1(s) \cdot I(s)$$



$$R' = \beta \beta' \frac{1}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot Z_1(s)$$

$$Q(s) = \frac{\beta Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

(34) Zasada argumentu Cauchy, twierzenie Michajłowa o stabilności w sensie BIBO

Zasada argumentu Cauchy

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Wszystkie miejsca zerowe są pędywnie

$$M(s) = a_m \prod_{i=1}^m (s - s_i) \quad a_m > 0$$

Dla $s = j\omega$

$$M(j\omega) = a_m \prod_{i=1}^m (j\omega - s_i) = a_m \prod_{i=1}^m M_i e^{j\varphi_i} \quad M_i = (j\omega - s_i)$$

$$\varphi_i = \arg(j\omega - s_i)$$

$$\arg M(j\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_i = \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - s_i)$$

$L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ liczba pierwiastków w lewej półpłaszczyźnie
 $-p \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ———— w prawej ————

$$\arg M(j\omega) = L \cdot \frac{\pi}{2} - p \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{u}{2} \cdot \pi$$

$u \Rightarrow$ liczba pierwiastków leżących na osi urojonej

$$m = L + p + u \Rightarrow$$
 stopień wielomianu

$$\arg M(j\omega) = (m - 2p) \cdot \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \omega < \infty$$

Zasada argumentu Cauchy.

Twierdzenie Michajłowa o stabilności w sensie BIBO

$$H(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

$$\text{st } M(s) \geq L(s)$$

$$\arg M(j\omega) = m \cdot \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \omega < \infty$$

PRZYKŁAD:

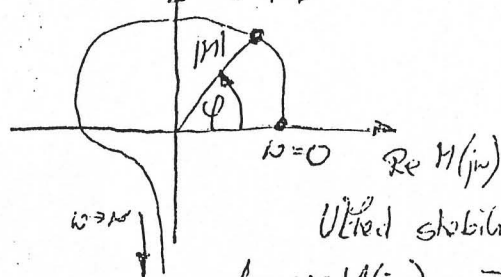
$$M(s) = s^3 + 4s^2 + 9s + 10$$

$$M(j\omega) = (j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 9j\omega + 10$$

$$M(j\omega) = -j\omega^3 + 4\omega^2 + j9\omega + 10$$

$$M(j\omega) = 10 - 4\omega^2 + j(9\omega - \omega^3)$$

$$\arg M(j\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{M(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{M(j\omega)\}} = \arctan \frac{9\omega - \omega^3}{10 - 4\omega^2}$$



Układ stabilny BIBO

$$\arg M(j\omega) = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$m=3$$

(38) Kryterium Nyquista stabilności w sensie BIBO układu ze sprzężeniem zwrotnym.

$$T(s) = \frac{K(s)}{F(s)} = \frac{\frac{L_K(s)}{M_K(s)}}{\frac{L_F(s)}{M_F(s)}} = \frac{L_K(s) \cdot M_F(s)}{L_F(s) \cdot M_K(s)}$$

$$F(j\omega) = \frac{L_F(j\omega)}{M_F(j\omega)} \quad \text{st} \quad L_F(s) = \text{st} \quad M_F(s)$$

$$M_F(s) \in \text{W.H}$$

$$\arg F(j\omega) = (m - 2p) \cdot \frac{\pi}{2} - (m_1 - 2p_1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

$$m = m_1$$

$$p_1 = 0$$

$$\arg F(j\omega) = -p \cdot \pi \quad \text{BIBO} \rightarrow p=0$$

$$\arg F(j\omega) = 0 \quad 0 \leq \omega < \infty$$

33) Sygnał zmodulowany amplitudowo.
 $(F(t) = F_0 + f_m(t))$ i charakterystyka: $f_m(t) = f_m(t + kT)$ $k = 0, 1, 2, \dots$

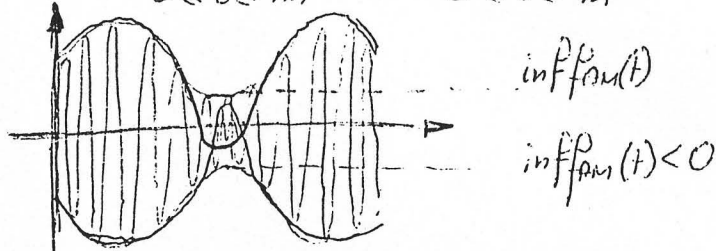
Przebieg zmodulowanego amplitudowo

$$F_{AM}(t) = [F_0 + f_m(t)] \cos(\Omega_0 t + \varphi_0)$$

obwódka sygnału zmodulowanego
(fali nośnej)

$$\frac{dF(t)}{dt} T_0 \ll \sup_{0 \leq t \leq T_m} f_m(t) - \inf_{0 \leq t \leq T_m} f_m(t) \quad \Omega_0 T_0 = 2\pi$$

obwódka
mian
obwódka



$$\inf_{0 \leq t \leq T_m} F_{AM}(t) \geq 0$$

Warunek liniowości
sygnału zmodulowanego
amplitudowo

in. $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$ - *nośna - f.t.*

$F(t) = F_0 [1 + m \cos(\omega t)]$ - *ω < Ω_0 - nośna*

$m = \frac{F_m}{F_0}$ - *Głębokość modulacji*
 $m \leq 1$

W warunkach amplitudowego sygnału zmodulowanego mamy do czynienia z dwiema sytuacjami. Sygnał pierwotny był zmodulowany liniowo. Tylko nośna została by zmodulowana sygnałem i odkształcony.

40) Modułacja kąta sygnału.

$$f(t) = F_0 \cos \psi(t) \quad F_0 = \text{const}$$

$$\psi(t) = \Omega t + \varphi_0$$

$$\Omega = \frac{d\psi}{dt} \quad \frac{d\psi}{dt} = \Omega(t) \Rightarrow \psi(t) = \int \Omega(t) dt + \varphi_0$$

Przy modulacji częstotliwości, częstotliwość fali nośnej jest zmienną w czasie funkcją średnią

$$\Omega(t) = \Omega_0 + k f_m(t)$$

DEWIAcja częstotliwości $\Delta \Omega = |\Omega(t)| - \Omega_{\text{max}}$

$$f_m(t) = F_m \cos(\omega t) \rightarrow \text{sygnał modulujący}$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 + k F_m \cos \omega t = \Omega_0 + \Omega_m \cos \omega t$$

$\frac{f_m(t)}{f_m(t)_{\text{max}}}$

$$\psi(t) = \Omega_0 t + \frac{\Omega_m}{\omega} \sin \omega t + \varphi_0 \quad \varphi_0 = 0$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta \quad \text{indeks modulacji}$$

$$f_{FM}(t) = F_0 \cos[\Omega_0 t + \beta \sin \omega t]$$

$$f_{FM}(t) = F_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{j\Omega_0 t} e^{j\beta \sin \omega t} \right\}$$

$$e^{j\beta \sin \omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{jk\omega t}$$

$J_k(\beta) \rightarrow$ funkcje Bessela o k -tych rzędach

$$B = 2\omega(1 + \beta) \quad \text{szerokość pasma}$$

Zmiany amplitudy nie powodują modulacji sygnału częstotliwościowej. Szerokość pasma jest wówczas większa od sygnału modulującego amplitudowo.